Corrigés

1 Corrigé de l'Exercice I-1

1) $y = \alpha x^{\beta}$ peut s'écrire en passant en Log $Ln(y) = Ln(\alpha) + \beta Ln(x)$
Le modèle linéaire a pour variable expliquée Ln(y) =z et comme variable explicative Ln(x)=w et ne peut fonctionner que si on définit l'erreur par ϵ

$$z = a_0 + \beta w + \epsilon$$

2) $y = a + bLn(x)$ est déjà un modèle linéaire avec comme variable explicative w= Ln(x)

$$y = a + bw + \epsilon$$

3) $y = \frac{x}{ax+b}$ ne peut se mettre sous une forme linéaire et sera estimé par des techniques non linéaires

$$y = \frac{x}{ax + b} + \epsilon$$

4) $Y = \frac{ax+b}{x} = a + b\frac{1}{x}$ peut s'écrire linéairement en posant w=1/x

$$y = a + bw + \epsilon$$

2 Corrigé de l'Exercice I-2

1) Les MCO donnent l'estimateur de $\overrightarrow{a} \Rightarrow \widehat{\overrightarrow{a}} = ({}^tXX)^{-1t}X\overrightarrow{y}$
or $\widehat{\overrightarrow{y}} = X\widehat{\overrightarrow{a}} = X({}^tXX)^{-1t}X\overrightarrow{y}$ on a donc $M = X({}^tXX)^{-1t}X$
$\overrightarrow{e} = \overrightarrow{y} - \widehat{\overrightarrow{y}} = I\overrightarrow{y} - X({}^tXX)^{-1t}X\overrightarrow{y}$ où I est la matrice identité avec des 1 sur la diagonale et 0 ailleurs
$\overrightarrow{e} = (I - X({}^tXX)^{-1t}X)\overrightarrow{y} = N\overrightarrow{y}$ on a donc $N = (I - X({}^tXX)^{-1t}X)$
$\overrightarrow{e} = (I - X({}^tXX)^{-1t}X)\overrightarrow{y} = (I - X({}^tXX)^{-1t}X)(X\overrightarrow{a} + \overrightarrow{\epsilon}) = X\overrightarrow{a} - X\overrightarrow{a} - (I - X({}^tXX)^{-1t}X)\overrightarrow{\epsilon} = W\overrightarrow{\epsilon}$ on a donc $W = N$
2) Ces matrices sont des matrices de projections orthogonales, pour cela elle doivent être symétriques et égales à leur carré.
Faisons la démonstration pour M
On doit avoir $M =^t M$ or ${}^tM = X({}^tXX)^{-1t}X$ car $({}^tXX)^{-1}$ est par construction une matrice symétrique
M^2 $= X({}^tXX)^{-1t}XX({}^tXX)^{-1t}X = X({}^tXX)^{-1t}X$ =M
3) La matrice M est formée de matrices de rang k (Xest de rang k car de plein rang), donc M est de rang k, c'est une matrice de projection orthogonale sur le sous-ensemble H$_k$ de R^n engendré par les k+1 variables explicatives. On en déduit que $\widehat{\overrightarrow{y}}$ est la projection orthogonale de $\overrightarrow{y}$ sur H$_k$.
4) Les hypothèses sont les hypothèses de base des MCO : n>k et pas de relation linéaire entre les variables explicatives.

5) La somme des carrés des résidus SCR=${}^t\overrightarrow{e}\,\overrightarrow{e}$. Pour faire le calcul on va utiliser les résultats du 2) et 3)

$$\overrightarrow{e} = (I - X({}^tXX)^{-1t}X)\overrightarrow{y} = N\overrightarrow{y} = (I - M)\overrightarrow{y}$$

et $M={}^tM = M^2$
${}^t\overrightarrow{e}\,\overrightarrow{e} ={}^t\overrightarrow{y}(I-M)(I-M)\overrightarrow{y} ={}^t\overrightarrow{y}\,\overrightarrow{y} -{}^t\overrightarrow{y}M\overrightarrow{y} -{}^t\overrightarrow{y}M\overrightarrow{y} +{}^t\overrightarrow{y}M^2\overrightarrow{y} ={}^t\overrightarrow{y}\,\overrightarrow{y} -{}^t\overrightarrow{y}M\overrightarrow{y}$
$={}^t\overrightarrow{y}\,\overrightarrow{y} -{}^t\overrightarrow{y}X({}^tXX)^{-1t}X\overrightarrow{y} ={}^t\overrightarrow{y}\,\overrightarrow{y} -{}^t\overrightarrow{y}X\overrightarrow{\widehat{a}}$

3 Corrigé de l'Exercice I-3

1) Je n'ai pas le courage d'écrire tous les développements, ils sont basés sur le fait que

$$\begin{aligned} \sum x_t^2 - n\overline{x}^2 &= \sum(x_t - \overline{x})^2 \\ \sum x_t y_t - n\overline{xy} &= \sum(x_t - \overline{x})(y_t - \overline{y}) \end{aligned}$$

On trouve

$$\begin{aligned} \widehat{a_1} &= \frac{\sum(x_t - \overline{x})(y_t - \overline{y})}{\sum(x_t - \overline{x})^2} \\ \widehat{a_0} &= \overline{y} - \widehat{a_1}\overline{x} \end{aligned}$$

2) Même remarque !!!!
3) pour avoir $\widehat{a_1} = \widehat{b_1}$ les corrélation entre les variables x et z doivent être nulles
4) pour avoir en plus $\widehat{a_0} = \widehat{b_0}$ il faut $\overline{z} = 0$

4 Corrigé de l'exercice I-4

La matrice ^{t}XX s'écrit,

$${}^tXX = \begin{pmatrix} 12 & 24 \\ 24 & 48 \end{pmatrix}$$

On constate que son déterminant det=$12^2 - 24.24 = 0$ la matrice n'est pas inversible donc les variables x et z sont liées par une relation linéaire (en fait z=2x). Comme elles expriment la même chose on choisit l'une des deux et on estime le modèle .
y=ax+b+ϵ
$\widehat{a} = (12)^{-1}10 = 5/6$
$\widehat{b} = 12 - 5/6.10 = 11/3$