

EXERCICES

(Le corrigé est dans la partie Corrigés)

1 Exercice I-1

Pour chacun de ces quatre modèles indiquer si l'on peut linéariser ce modèle pour pouvoir appliquer la méthode des Moindres Carrés Ordinaires et préciser alors comment faire intervenir le terme erreur.

$$\begin{aligned}y &= \alpha x^\beta \\y &= a + b \text{Log}(x) \\y &= \frac{x}{ax + b} \\y &= \frac{ax + b}{x}\end{aligned}$$

2 Exercice I-2

Soit le modèle à $k+1$ variables explicatives (k variables plus la constante)

$$\begin{aligned}y_t &= a_0 + a_1 x_{1t} + \dots + a_k x_{kt} + \epsilon_t \\ \vec{y} &= X \vec{a} + \vec{\epsilon}\end{aligned}$$

On note $\widehat{\vec{a}}$ le vecteur estimateur des coefficients a_i , $\widehat{\vec{y}}$ l'estimateur de \vec{y} et \vec{e} le vecteur des résidus. La taille de l'échantillon est n .

- 1) Montrer que $\widehat{\vec{y}} = M \vec{y}$, $\vec{e} = N \vec{y}$ et $\vec{e} = W \vec{\epsilon}$ pour des matrices M , N et W que l'on précisera.
- 2) Quelle est la nature de ces matrices ?
- 3) En déduire les propriétés géométriques des vecteurs $\widehat{\vec{y}}$ et \vec{e} .
- 4) Quelles hypothèses avez-vous utilisées dans cet exercice.
- 5) Vérifier que SCR la somme des carrés des résidus est égale à ${}^t \vec{y} \vec{y} - {}^t \vec{y} X \widehat{\vec{a}}$

3 Exercice I-3

1) Soit le modèle $y_t = a_0 + a_1 x_t + \epsilon_t$ à une variable X plus un terme constant

On estime les deux coefficients par les MCO sur un échantillon de taille n .

Montrer que l'on obtient les mêmes résultats sur ce modèle et sur le modèle centré

$$y_t - \bar{y} = a_1(x_t - \bar{x}) + \epsilon_t - \bar{\epsilon}$$

où les barres représentent les moyennes des variables.

2) Soit le modèle avec la même variable x plus la variable z , $y_t = b_0 + b_1 x_t + b_2 z_t + u_t$

Les résultats des MCO sont identiques sur le modèle centré

$$y_t - \bar{y} = b_1(x_t - \bar{x}) + b_2(z_t - \bar{z}) + u_t - \bar{u}$$

Calculer sous cette dernière forme les estimateurs de b_1 , b_2 et b_0

2) A quelle condition a-t-on $\hat{a}_1 = \hat{b}_1$?

3) A quelle condition a-t-on en plus $\hat{a}_0 = \hat{b}_0$

4 Exercice I-4

On estime le modèle $y_t = a_0 + a_1x_t + a_2z_t + \epsilon_t$ à l'aide de l'échantillon de taille $n=23$

$$\bar{x} = 10, \bar{z} = 20, \bar{y} = 12, \sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2 = 12, \sum_{t=1}^n (z_t - \bar{z})^2 = 48$$

$$\sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})(z_t - \bar{z}) = 24, \sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y}) = 10, \sum_{t=1}^n (z_t - \bar{z})(y_t - \bar{y}) = 20 \text{ et } \sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2 = 10$$

Estimer les coefficients du modèle.